

文章编号: 1000-7598 (2011) 11-3312-07

基于非线性破坏准则的边坡稳定性极限分析

张迎宾^{1, 2}, 李 亮¹, 赵炼恒¹, 姚 辉¹, 任东亚¹

(1. 中南大学 土木工程学院, 长沙 410075; 2. 九州大学大学院 土木与结构工程学院, 福岡 819-0395)

摘 要: 上限定理是求解岩土工程问题的有效工具。以上限定理为理论基础, 分析边坡的稳定性问题, 并考虑了岩土材料破坏准则的非线性特性。在非线性的 Mohr-Coulomb 破坏准则下, 采用条分法与极限分析上限法相结合的方法, 对边坡稳定性进行分析。通过切线法引入非线性强度参数 c_i 、 φ_i , 推导了岩土材料在非线性的破坏准则下的相关流动法则, 建立功能方程, 推导了边坡直线滑裂面、折线滑裂面和光滑曲线滑裂面安全系数 F 的计算方程。采用数学规划法计算后与工程实际中常用的边坡稳定性分析方法进行对比, 并获得安全系数 $F=1.0$ 时的稳定性系数 N_s 。与已有的研究成果进行比较分析, 结果表明了该方法的正确性及优越性。

关 键 词: 非线性破坏准则; 极限分析上限法; 安全系数; 稳定性系数

中图分类号: TU 432

文献标识码: A

Limit analysis of slope stability based on nonlinear failure criterion

ZHANG Ying-bin^{1, 2}, LI Liang¹, ZHAO Lian-heng¹, YAO Hui¹, REN Dong-ya¹

(1. School of Civil Engineering, Central South University, Changsha 410075, China;

2. Department of Civil and Structural Engineering, Kyushu University, Fukuoka 819-0395, Japan)

Abstract: Upper bound limit analysis method is an effective tool in solving geotechnical engineering problems. Conventional calculations in stability of slopes are formulated assuming the soils obeying a linear Mohr-Coulomb yield criterion. However, experimental evidences show that the failure criteria of almost all geomaterials are nonlinear over a wide range of normal stresses. In this paper, the soil masses of slopes are assumed to follow a nonlinear Mohr-Coulomb failure criterion. Based on the nonlinear failure criterion, the paper studies the problem of slope stability by combining the slice method and limit analysis upper bound method. The nonlinear strength parameters cohesion c_i and internal friction angle φ_i are introduced through the tangent method. Joined influence of nonlinearity is established. The equations of equivalent in rates of external work and internal energy dissipation are established based on the joined influence. The equations of factors of safety for slope with different slide surface (straight line, broken-line, and circle) are deduced and the plastic analysis upper limit solutions are calculated well by these equations. A classical slope calculation case shows that the method is of correctness and high precision which consists with previous achievements. The new method can be used to guide the slope stability analysis based on the nonlinear failure criterion on the plastic upper limit theorem.

Key words: nonlinear failure criterion; upper bound limit analysis; factor of safety; stability factor

1 引 言

上限定理是求解岩土工程问题的一种有效工具^[1], 边坡稳定性极限分析上限法一直是岩土工程界的热点研究问题之一。大多数研究是采用线性破坏准则, 而大量的试验结果显示, 岩土材料的破坏准则呈现非线性。自从 Baker 等^[2]于 1983 年在极限分析中引入非线性破坏准则以来, 基于该破坏准则的边坡稳定性问题的极限分析法成为学术界的研究

热点。Zhang 等^[3]于 1987 年提出反推法, 研究了非线性破坏准则下岩质边坡的稳定性问题; Drescher 等^[4]于 1988 年提出非线性破坏准则下土坡稳定性系数的切线算法; Fredlund^[5]、杨小礼等^[6-8]先后提出广义切线法及其扩展方法。总的来说, 非线性破坏准则下的边坡极限分析的科技论文还较少, 有的也难以应用到实际工程计算中^[9-10]。

本文以极限分析上限法为理论基础, 研究了非线性 Mohr-Coulomb 破坏准则下边坡稳定性问题,

收稿日期: 2010-03-16

基金项目: 铁道部科技研究开发计划重点资助项目(No. 2008G032-3); 西部交通建设科技项目(No. 2006318802111)。

第一作者简介: 张迎宾, 男, 1983 年生, 博士研究生, 主要从事边坡稳定性方面的研究工作。E-mail: yingbinz516@126.com

采用强度折减法引入边坡安全系数 F , 推导了边坡不同滑裂面情况下的安全系数 F 的计算方程, 并以数学规划方法为基础, 计算了边坡的稳定性系数 N_s 。

2 非线性破坏准则及强度折减

工程计算中, 岩土材料的强度准则通常采用线性 Mohr-Coulomb 准则, 即

$$f(\sigma, \tau) = \tau - c - \sigma \tan \varphi = 0 \quad (1)$$

式中: τ 和 σ 分别为破坏面上的剪切应力和法向应力; c 和 φ 为岩土材料的抗剪强度指标。工程实际中大量的试验证明, 岩土材料的破坏准则呈现非线性, 其非线性曲线可用下式描述:

$$\sigma_1 = q_p + M_p^* (\sigma_3 / q_p)^\alpha \quad (2)$$

式中: M_p^* 和 α 均为由三轴试验确定的参数。该式最早是由 Bieniawski 于 1974 年提出的, 它是在线性 Mohr-Coulomb 强度准则的基础上发展起来的。在应力空间(τ , σ)中, 式(2)的等价表达式为

$$f(\sigma, \tau) = \tau - c_0 (1 + \sigma / \sigma_0)^{1/m} = 0 \quad (3)$$

式中: c_0 、 σ_0 和 m 均为岩土材料参数。

将式(3)绘制成曲线, 如图 1 所示。

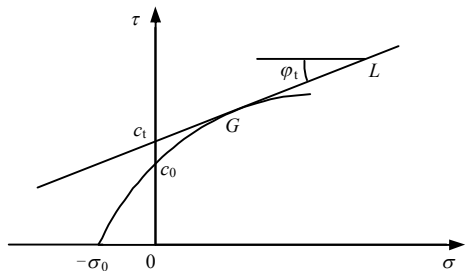


图 1 非线性破坏强度准则

Fig.1 Diagram of a nonlinear failure criterion

设破坏面处某点 $G(\sigma, \tau)$ 的切线方程 L 为

$$\tau = c_t + \tan \varphi_t \sigma \quad (4)$$

式中: c_t 和 $\tan \varphi_t$ 分别为切线的截距和斜率, 表示材料的非线性强度参数, 其表达式为

$$c_t = \frac{m-1}{m} c_0 \left(\frac{m \sigma_0 \tan \varphi_t}{c_0} \right)^{\frac{1}{1-m}} + \sigma_0 \tan \varphi_t \quad (5)$$

$$\tan \varphi_t = \frac{\partial \tau}{\partial \sigma} = \frac{c_0}{m \sigma_0} \left(1 + \frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^{\frac{1-m}{m}} \quad (6)$$

由式(5)、(6)可知, 点 $G(\sigma, \tau)$ 处对应的强度值和该点正应力 σ 有关, 因此, 一种可能的计算思路为: 首先确定破坏面处该点的正应力 σ , 再由式(6)确定 φ_t , 进而可根据式(5)确定 c_t 。本文采用直接搜索 φ_t 的方法以得到最优结果, 文献[10]已论证 $\varphi_t < \arctan(c_0 / m \sigma_0)$ 。

在非线性破坏准则下, 边坡的稳定性系数为

$$N_s = H_{cr} \gamma / c_t \quad (7)$$

式中: H_{cr} 为边坡临界高度; γ 为土的重度。

采用强度折减法, 引入安全系数 F , 使边坡处于极限状态^[11-12]。经过强度折减后的岩土材料强度指标变为

$$\left. \begin{aligned} c_e &= c_t / F \\ \tan \varphi_e &= \tan \varphi_t / F \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

3 基于非线性破坏准则的极限分析法

虚功率原理表明, 对于一个理想刚塑性体, 任意一组静力容许的应力场 σ_{ij} 和任意一组机动容许的速度场 v_i , 外力的虚功率等于物体所能接受的虚变形功率, 即

$$\int_A T_i v_i dA + \int_V W_i v_i dv = \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dv \quad (9)$$

式中: W_i 为体积力; T_i 为物体表面边界力; ε_{ij} 为应变率, 由 v_i 依照几何方程求得。

在虚功率原理的基础上可推导出上限定理为: 在所有的机动容许的塑性变形速度场相对应的荷载中, 极限荷载为最小。在结构的上限分析时, 提高材料的屈服强度不会降低结构的极限荷载, 在直线破坏准则下(外切线)的上限解一定为真实极限荷载(非线性破坏准则对应的极限荷载)的上限^[13]。

对于非线性 Mohr-Coulomb 破坏准则, 假定土体满足相关流法则, 塑性速度 V 的法向分量 V_n 和切向分量 V_s 应遵守如下关系^[14]:

$$\frac{V_n}{V_s} = \frac{\partial f}{\partial \sigma} / \frac{\partial f}{\partial \tau} = -\frac{c_0}{m \sigma_0} \left(1 + \frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^{\frac{1-m}{m}} \quad (10)$$

将式(10)与式(6)比较不难发现:

$$\left| \frac{V_n}{V_s} \right| = \tan \varphi_t \quad (11)$$

式(11)表明, 塑性速度 V 与破坏面的夹角为 φ_t , 如图 2 所示。

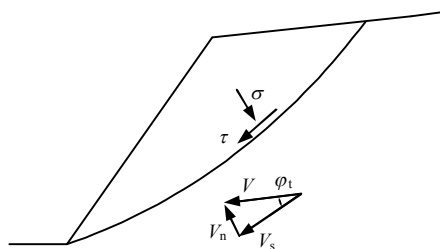


图2 非线性破坏准则相关流法则

Fig.2 The associated flow rule for nonlinear failure criterion

根据文献[11-12],破坏面上的内力在塑性速度上所产生的功率称为内能耗散率,则单位面积上的内能耗散率为

$$\Delta A = \tau V_s + \sigma V_n = (\tau \cos \varphi_t - \sigma \sin \varphi_t) V \quad (12)$$

将切线方程式(4)代入式(12),化简得非线性 Mohr-Coulomb 破坏准则下单位破坏面上内能耗散率公式:

$$\Delta A = c_t \cos \varphi_t V \quad (13)$$

下面将以非线性破坏准则下的相关流法为基础,对不同破坏面边坡的稳定性进行极限上限分析。

4 边坡稳定性分析

4.1 边坡直线滑裂面稳定性分析

假定如图3所示均质边坡, H 为坡高, α 为坡角, β 为坡顶角,坡体岩土材料强度参数 c_0 、 σ_0 和 m 满足非线性 Mohr-Coulomb 屈服准则式(3),在重力 W 和坡顶荷载 T 的作用下破坏,破裂面为平面,与水平面成 θ 角。破坏形式满足如下条件:当坡体沿直线破裂面向下滑动时,形成刚性楔体 ABC ,其下滑速度为 V ,由非线性屈服准则的相关流法可知,该速度与滑裂面成 φ_t 角。

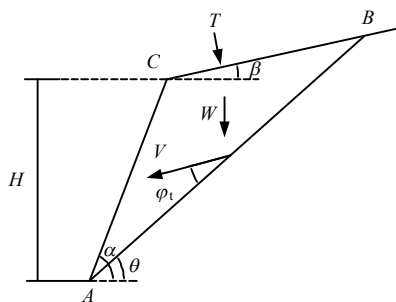


图3 边坡直线滑裂面滑动速度简图

Fig.3 Diagram of sliding speed for slope with a linear failure surface

重力 W 和表面荷载 T 产生的外功率分别为

$$\dot{W}_w = \frac{1}{2} \gamma H^2 (\cot \theta - \cot \alpha) \frac{1 - \cot \alpha \tan \beta}{1 - \cot \theta \tan \beta} \sin(\theta - \varphi_t) V \quad (14)$$

$$\dot{W}_T = TV \sin(\theta - \varphi_t - \beta) \quad (15)$$

内能耗散率为

$$\dot{D}_{\text{内}} = \frac{c_t H}{\sin \theta} V \left(\frac{1 - \cot \alpha \tan \beta}{1 - \cot \theta \tan \beta} \right) \cos \varphi_t \quad (16)$$

将岩土材料强度按式(8)进行折减使边坡达到极限状态。根据虚功率原理,使外功率等于内能耗散率,有:

$$\dot{W}_w + \dot{W}_T = \dot{D}_{\text{内}} \quad (17)$$

$$\left[\frac{1}{2} \gamma H^2 (\cot \theta - \cot \alpha) \sin(\theta - \varphi_c) - \frac{c_c H}{\sin \theta} \cos \varphi_c \right] \left(\frac{1 - \cot \alpha \tan \beta}{1 - \cot \theta \tan \beta} \right) + T \sin(\theta - \varphi_c - \beta) = 0 \quad (18)$$

将隐含在 c_c 和 φ_c 中的安全系数 F 作为未知量,可得非线性 Mohr-Coulomb 破坏准则下边坡安全系数 F 的方程为

$$F = \left\{ c_t H \cos \varphi_c / \sin \theta \right\} / \left[\frac{1}{2} \gamma H^2 (\cot \theta - \cot \alpha) \sin(\theta - \varphi_c) + T \sin(\theta - \varphi_c - \beta) \left(\frac{1 - \cot \theta \tan \beta}{1 - \cot \alpha \tan \beta} \right) \right] \quad (19)$$

式中: $\varphi_c = \arctan \left(\frac{\tan \varphi_t}{F} \right)$ 。

根据极限分析上限定理,边坡安全系数 F 应该取上式的最小值。若使 F 取得最小值,则函数 $F(\theta, \varphi_t)$ 应满足条件:

$$\left. \begin{aligned} \partial F / \partial \theta &= 0, \partial F / \partial \varphi_t = 0 \\ \beta &< \theta < \alpha \\ 0 &< \varphi_t < \arctan(c_0 / m \sigma_0) \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

为了计算方便,将上述问题转化为一个有约束条件的非线性优化问题:

$$\min F = F(\theta, \varphi_t) \quad (21)$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} 0 < \varphi_t < \arctan[c_0 / (m \sigma_0)] \\ \beta < \theta < \alpha \end{cases} \quad (22)$$

采用非线性序列二次规划法对上式求解,进而

得到边坡安全系数 F 的一个上限解答。

4.2 边坡折线滑裂面稳定性分析

如图 4 所示高 H 的边坡，坡体在重力 W 和坡顶荷载 T 的作用下破坏，破坏面为如图所示的折线。将滑动体采用竖直条分法分成 n 个独立条块，滑裂面材料强度参数 c_0 、 σ_0 、 m 与条块界面材料强度参数 c'_0 、 σ'_0 、 m' 均满足非线性 Mohr-Coulomb 屈服准则式 (3)。 V_i 为第 i 个条块的速度， φ_u 为与滑面夹角， W_i 为自重， U_i 为相对右边条块的速度， φ'_u 为 U_i 与豎直方向夹角， θ_i 为该条块与水平方向夹角。

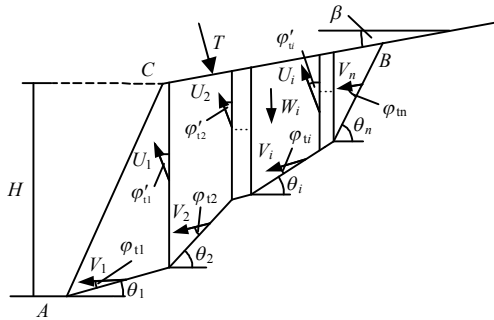


图 4 边坡折线滑裂面滑动速度简图

Fig.4 Diagram of sliding speed for slope with a fold-linear failure surface

一些学者研究了极限分析上限法中速度场的构建方法^[13-16]。第 i 个条块及第 i 个界面的速度都可以表示成第 1 个条块的速度 V_1 的函数：

$$V_i = \left(\prod_{m=1}^{i-1} \frac{\cos(\theta_m - \varphi'_{im} - \varphi_{i(m+1)})}{\cos(\theta_{m+1} - \varphi'_{im} - \varphi_{i(m+1)})} \right) V_1 \quad (23)$$

$$U_i = \left(\prod_{m=1}^i \frac{\sin(\theta_{m+1} - \theta_m)}{\cos(\theta_{m+1} - \varphi'_{im} - \varphi_{i(m+1)})} \right) V_1 \quad (24)$$

需要说明的是，式 (23) 中 i 的取值范围为 $2 \sim n$ ，对应的 V 分别表示第 $2 \sim n$ 个条块的滑动速度。而式 (24) 中 i 的取值范围为 $1 \sim (n-1)$ ，对应的 U 分别表示第 $1 \sim (n-1)$ 个条间的相对滑动速度。另外，本文只考虑了条间速度的一种运动趋向（左边条块相对右边条块向上运动），另一种运动趋向的速度场构建方式与此类似，可参阅参考文献[11-12]。

重力 W 和表面荷载 T 产生的外功率分别为

$$\dot{W}_W = W_1 \sin(\theta_1 - \varphi_{t1}) V_1 + \sum_{i=2}^n [V_i W_i \sin(\theta_i - \varphi_{ui})] \quad (25)$$

$$\dot{W}_T = T_1 \sin(\theta_1 - \varphi_{t1} - \beta) V_1 + \sum_{i=2}^n [V_i T_i \sin(\theta_i - \varphi_{ui} - \beta)] \quad (26)$$

如果第 i 个条块上没有表面荷载作用，则 $T_i=0$ 。

内能耗散率分为两部分，一部分为沿滑裂面的内能耗散率；另一部分为土条界面的内能耗散率。分别计算如下：

$$\dot{D}_{\text{滑}} = c_{t1} \cos \varphi_{t1} L_1 V_1 + \sum_{i=2}^n [c_{ui} \cos \varphi_{ui} L_i V_i] \quad (27)$$

$$\dot{D}_{\text{界}} = \sum_{i=1}^{n-1} [U_i c'_{ei} \cos \varphi'_{ei} L'_i] \quad (28)$$

式中： c_{ui} 和 φ_{ui} 分别为第 i 个条块的材料强度参数； L_i 为第 i 个条块的底面长度； c'_{ei} 和 φ'_{ei} 分别为第 i 个界面上的材料强度参数； L'_i 为第 i 个界面的长度。

将岩土材料强度按式 (8) 进行折减使边坡达到极限状态。根据虚功率原理，使外功率等于内能耗散率，有：

$$\dot{W}_W + \dot{W}_T = \dot{D}_{\text{滑}} + \dot{D}_{\text{界}} \quad (29)$$

$$W_1 \sin(\theta_1 - \varphi_{e1}) V_1 + \sum_{i=2}^n [V_i W_i \sin(\theta_i - \varphi_{ei})] +$$

$$T_1 \sin(\theta_1 - \varphi_{e1} - \beta) V_1 + \sum_{i=2}^n [V_i T_i \sin(\theta_i - \varphi_{ei} - \beta)] =$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} [U_i c'_{ei} \cos \varphi'_{ei} L'_i] V_1 + c_{e1} \cos \varphi_{e1} L_1 V_1 +$$

$$\sum_{i=2}^n [c_{ei} \cos \varphi_{ei} L_i V_i] \quad (30)$$

式中： $c_{ei} = c_{ui} / F$ ， $c'_{ei} = c'_{ui} / F$ ， $\varphi_{ei} = \arctan(\tan \varphi_{ui} / F)$ ，且 $\varphi'_{ei} = \arctan(\tan \varphi'_{ui} / F)$ 。

将隐含在 φ'_{ei} 、 φ_{ei} 、 c_{ei} 和 c'_{ei} 中的安全系数 F 作为未知量，上式可表示为 F 的函数 $F(\theta_i, \varphi_{ui}, \varphi'_{ui})$ 。

根据极限分析上限定理，边坡安全系数 F 应该取上述函数的最小值。要使 F 最小，函数 $F(\theta_i, \varphi_{ui}, \varphi'_{ui})$ 应满足条件：

$$\left. \begin{aligned} &\partial F / \partial \theta_i = 0, \partial F / \partial \varphi_{ui} = 0, \partial F / \partial \varphi'_{ui} = 0 \\ &0 < \theta_i < \alpha, i = 1, 2, \dots, n \\ &0 < \varphi_{ui} < \arctan(c_0 / m \sigma_0) \\ &0 < \varphi'_{ui} < \arctan(c'_0 / m \sigma'_0) \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

为了计算方便，将上述问题转化为一个有约束条件的非线性优化问题：

$$\min F = F(\theta_i, \varphi_{ui}, \varphi'_{ui}) \quad (32)$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} 0 < \theta_i < \alpha \\ 0 < \varphi_{ui} < \arctan(c_0 / m \sigma_0) \\ 0 < \varphi'_{ui} < \arctan(c'_0 / m \sigma'_0) \end{cases} \quad (33)$$

采用非线性序列二次规划法对上式求解, 进而得到边坡安全系数 F 的一个上限解答。

4.3 边坡光滑曲线滑裂面稳定性分析

如图 5 所示边坡, 几何参数同图 4 边坡。假设在重力 W 和坡顶荷载 T 作用下失稳, 坡体绕圆心 O 向下滑动, 滑裂面为光滑圆弧, 该滑裂面由角度 δ 和 η 确定 (图 5)。屈服准则采用非线性 Mohr-Coulomb 屈服准则。

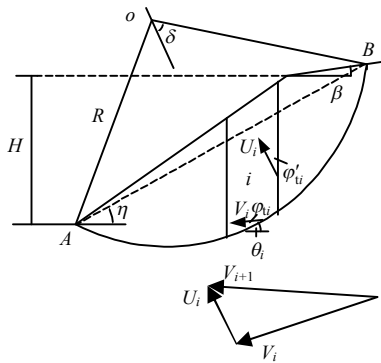


图 5 边坡光滑曲线滑裂面滑动速度简图

Fig.5 Diagram of sliding speed for slope with a smooth curve failure surface

对该边坡采用等弧度垂直条分法进行分析, 即每个土条的底边相等。将坡体划分成 n 个条块, 则每个条块的底边长均为 $L = 2\delta R/n$, R 为圆半径, 由几何关系可得

$$R = \frac{H(1 - \tan \beta / \tan \alpha)}{2 \sin \delta (\sin \eta - \tan \beta \cos \eta)} \quad (34)$$

条块 i 的底边倾斜角为

$$\theta_i = \eta - \delta + (2i - 1) \frac{\delta}{n} \quad (35)$$

按照 4.2 节速度场的构建方法, 第 i 个条块的速度与式 (23) 有相同的表达式; 第 i 个界面的速度可以表示成第 1 个条块的速度 V_1 的函数:

$$U_i = \left(\prod_{m=1}^i \frac{\sin(2\delta/n)}{\cos(\theta_{m+1} - \phi'_{im} - \phi_{i(m+1)})} \right) V_1 \quad (36)$$

重力 W 和表面荷载 T 产生的外功率的计算公式分别与式 (25) 和 (26) 有相同的表达形式, 不同的是, 该破坏模式下条块单元的重力 $W_i = \gamma^2 h_i \cos \theta_i L$; γ 为土体重度; h_i 为第 i 个条块的高度按下式计算:

$$h_i = \begin{cases} 2R \sin \frac{\theta}{2} \left[\cos \left(\frac{\theta}{2} + \eta - \delta \right) \tan \alpha - \sin \left(\frac{\theta}{2} + \eta - \delta \right) \right], & \theta_i \leq \eta - \delta + \theta_c \\ H \left(1 - \frac{\tan \beta}{\tan \alpha} \right) + 2R \sin \frac{\theta}{2} \left[\cos \left(\frac{\theta}{2} + \eta - \delta \right) \tan \beta - \sin \left(\frac{\theta}{2} + \eta - \delta \right) \right], & \theta_i > \eta - \delta + \theta_c \end{cases} \quad (37)$$

θ_c 由如下隐函数确定:

$$\cos \left(\frac{\theta_c}{2} + \eta - \delta \right) = \frac{H}{2R \tan \alpha \sin \frac{\theta_c}{2}} \quad (38)$$

内能耗散率发生在滑裂面和土条界面上, 有:

$$\dot{D}_{\text{滑}} = \left\{ c_{t1} \cos \phi_{t1} V_1 + \sum_{i=2}^n [c_{ui} \cos \phi_{ui} V_i] \right\} L \quad (39)$$

$$\dot{D}_{\text{界}} = \sum_{i=1}^{n-1} [U_i c'_{ui} \cos \phi'_{ui} h_i] \quad (40)$$

式中: c_{ui} 和 ϕ_{ui} 分别为第 i 个条块的材料强度参数; c'_{ui} 和 ϕ'_{ui} 分别为第 i 个界面上的材料强度参数。

将岩土材料强度按式 (8) 进行折减使边坡达到极限状态。根据虚功率原理, 按式 (29) 使外功率等于内能耗散率, 有:

$$\begin{aligned} & W_1 \sin(\theta_1 - \phi_{e1}) V_1 + \sum_{i=2}^n [V_i W_i \sin(\theta_i - \phi_{ei})] + \\ & T_i \sin(\theta_i - \phi_{ei} - \beta) V_1 + \sum_{i=2}^n [V_i T_i \sin(\theta_i - \phi_{ei} - \beta)] = \\ & \sum_{i=1}^{n-1} [U_i c'_{ei} \cos \phi'_{ei} h_i] V_1 + c_{e1} \cos \phi_{e1} L V_1 + \\ & \sum_{i=2}^n [c_{ei} \cos \phi_{ei} V_i] L \end{aligned} \quad (41)$$

式中: $c_{ei} = c_{ui} / F$, $c'_{ei} = c'_{ui} / F$, $\phi_{ei} = \arctan(\tan \phi_{ui} / F)$, 且 $\phi'_{ei} = \arctan(\tan \phi'_{ui} / F)$ 。

将隐含在 ϕ'_{ei} 、 ϕ_{ei} 、 c_{ei} 和 c'_{ei} 中的安全系数 F 作为未知量, 式 (41) 可理解为自变量为 δ 、 η 、 ϕ_i 和 ϕ'_i 的安全系数 F 的隐函数:

$$F = F(\delta, \eta, \phi_i, \phi'_i) \quad (42)$$

按照上限定理, 式 (42) 为安全系数理论值的上限, 安全系数可通过求其最小值得到。若使式 (42) 最小, 则函数 $F = F(\delta, \eta, \phi_i, \phi'_i)$ 应满足条件:

$$\left. \begin{aligned} \partial F / \partial \delta &= 0, \partial F / \partial \eta = 0 \\ \partial F / \partial \varphi_t &= 0, \partial F / \partial \varphi'_t = 0 \\ 0 < \varphi_t &< \arctan(c_0 / m\sigma_0) \\ 0 < \varphi'_t &< \arctan(c'_0 / m\sigma'_0) \\ 0 < \delta &< \pi/2, \beta < \eta < \alpha \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

为了计算方便, 将上述问题转化为一个有约束条件的非线性优化问题:

$$\begin{aligned} \min F &= F(\delta, \eta, \varphi_t, \varphi'_t) \quad (44) \\ \text{s.t.} \quad &\begin{cases} 0 < \varphi_t < \arctan(c_0 / m\sigma_0) \\ 0 < \varphi'_t < \arctan(c'_0 / m\sigma'_0) \\ 0 < \delta < \pi/2 \\ \beta < \eta < \alpha \end{cases} \quad (45) \end{aligned}$$

采用非线性序列二次规划法对上式求解, 进而得到边坡安全系数 F 的一个上限解答。

以上安全系数的求解是在坡高 H 已知的情况下进行的。为了求取边坡的稳定性系数 N_s , 将隐含在式 (41) 中坡高 H 当做因变量、折减系数 F 当作自变量进行分析, 用同样的方法求取边坡的极限高度 H_{cr} 构建的数学规划式如下:

$$\begin{aligned} \min H &= H(F, \delta, \eta, \varphi_t, \varphi'_t) \quad (46) \\ \text{s.t.} \quad &\begin{cases} 1.0 \leq F \\ 0 < \varphi_t < \arctan(c_0 / m\sigma_0) \\ 0 < \varphi'_t < \arctan(c'_0 / m\sigma'_0) \\ 0 < \delta < \pi/2 \\ \beta < \eta < \alpha \end{cases} \quad (47) \end{aligned}$$

理论上当边坡高度 H 达到 H_{cr} 时, 边坡的安全系数 F 应为 1.0。将求得的 H_{cr} 代入式 (7) 可获得边坡的稳定性系数 N_s 。

应当指出, 本文公式推导过程中, 为了使结果更具一般性, 按照滑裂面与条块界面岩土材料具有不同的强度参数进行考虑。

5 工程算例分析

为了说明本文方法的正确性, 用一工程算例进行验证, 设某均质边坡的坡体材料服从非线性 Mohr-Coulomb 破坏准则, 岩土材料参数 $c_0=90$ kPa, $\sigma_0=247.3$ kPa, $\gamma=20$ kN/m³。该算例与文献[3]的算例相同。本文在非线性的 Mohr-Coulomb 破坏准则下进行塑性极限分析, 首先计算当非线性参数 $m=1$ (此时岩土材料服从线性破坏准则), 坡高边界作用力 $T=0$ 、坡顶角 $\beta=0$ 、 $H=20$ m 时, 边坡分别按直线滑裂面和圆弧滑裂面滑动时的安全系数, 并与工程中常用的其他方法所得到的安全系数结果进行比较, 结果列于表 1。

从表 1 可知, 本文方法获得的计算结果与其他工程中常用的边坡稳定性分析方法获得的结果差别均不大, 一定程度上说明了本文方法的正确性。

为了便于与已有研究成果进行比较, 取边界作用力 $T=0$, 坡顶角 $\beta=0$ 。 m 分别为 1.0~2.5, 并且 α 分别取 45°、60°、90°。按本文方法采用外切线法计算稳定性系数结果与文献[3,10]的结果进行比较, 计算过程中考虑了多解性问题^[17], 结果列表 2。

表 1 不同破坏模式和计算方法获得的边坡安全系数 F

Table 1 Values of safety factor F for different failure modes and calculation methods

坡角 $\alpha / (^\circ)$	直线滑裂面		圆弧滑裂面破坏			
	极限平衡法	本文方法	瑞典条分法	简化 Bishop 法	Janbu 法	本文方法
45	2.970	2.976	2.034	2.070	2.126	2.097
60	2.127	2.128	1.728	1.715	1.772	1.738
90	1.348	1.210	1.194	1.101	1.277	1.107

表 2 非线性破坏准则下边坡稳定性系数 N_s

Table 2 Values of stability coefficient N_s for nonlinear failure criterion

m	$\alpha=90^\circ$					$\alpha=60^\circ$					$\alpha=45^\circ$				
	文献[3]		文献[10]		N_s 误差 /%	文献[3]		文献[10]		N_s 误差 /%	文献[3]		文献[10]		N_s 误差 /%
	N_s	N_s	N_s	F		N_s	N_s	N_s	F		N_s	N_s	N_s	F	
1.00	5.51	5.51	5.51	1.00	0.00	10.39	10.39	1.00	0.00	0.00	16.18	16.18	1.00	0.00	0.00
1.20	5.13	5.20	5.11	1.00	0.36	8.95	8.87	1.00	0.89	0.89	12.55	12.46	1.00	0.72	0.72
1.40	4.89	4.98	4.82	1.00	1.43	8.13	7.98	1.00	1.85	1.85	10.82	10.62	1.00	1.59	1.59
1.60	4.73	4.83	4.64	1.00	1.90	7.61	7.42	1.00	2.50	2.50	9.70	9.49	1.00	2.16	2.16
1.80	4.60	4.71	4.51	1.00	1.96	7.24	7.05	1.00	2.62	2.62	9.10	8.89	1.00	2.31	2.31
2.00	4.52	4.62	4.42	1.00	2.21	6.97	6.82	1.00	2.15	2.15	8.78	8.57	1.00	2.39	2.39
2.50	4.35	4.45	4.24	1.00	2.53	6.54	6.38	1.00	2.45	2.45	7.95	7.74	1.00	2.64	2.64

注: 表中 N_s 误差为与文献[3]相比结果。

从表 2 可知, 非线性参数 m 对边坡稳定性系数 N_s 影响较大, 随着 m 的增大, 边坡稳定性系数 N_s

显著减小, 这个结果与已有文献[3, 10, 15]计算结果相吻合。在几种情况下, 本文的计算结果均小于文

献[3, 10]的计算结果, 绝对误差不大于 2.64%, 并且依据上限法的基本观点, 边坡的稳定性系数越小, 越接近真实解, 对比说明了本文方法的正确性。

另外, 基于数学规划, 当边坡达到稳定性系数 N_s , 并且坡高达到临界高度 H_{cr} 时, 理论上 F 应为最小, 即 1.0。从表 2 中看出, 本文方法获得的安全系数 F 均为 1.00, 也可证明本文方法的正确性。

6 结 语

基于非线性 Mohr-Coulomb 破坏准则, 在塑性力学上限分析法的基础上, 对边坡的稳定性进行分析, 分别建立了直线破裂面、折线破裂面和圆弧破裂面的边坡安全系数 F 的求解方程, 并采用数学规划方法, 求得边坡的稳定性系数 N_s 。通过工程算例计算, 与已有研究成果进行对比分析, 结果表明了本文方法的正确性及优越性。

参 考 文 献

- [1] CHEN W F. Limit Analysis and soil plasticity[M]. Amsterdam: Elsevier Science, 1975.
- [2] BAKER R, FRYDMAN S. Upper bound limit analysis of soil with nonlinear failure criterion[J]. **Soils and Foundations**, 1983, 23(4): 34—42.
- [3] ZHANG X J, CHEN W F. Stability analysis of slopes with general nonlinear failure criterion[J]. **International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics**, 1987, 11(1): 33—50.
- [4] DRESCHER A, CHRISTOPOULOS C. Limit analysis of slope stability with nonlinear yield condition[J]. **International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics**, 1988, 12(4): 341—345.
- [5] FREDLUND D G, RAHARDJO H. Soil mechanics for unsaturated soils[M]. New York: John Wiley & Sons, 1994.
- [6] YANG X L, LI L, YIN J H. Stability analysis of rock slopes with a modified Hoek-Brown failure criterion[J]. **International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics**, 2004, 28(2): 181—190.
- [7] YANG X L, YIN J H. Slope stability analysis with nonlinear failure criterion[J]. **Journal of Engineering Mechanics**, 2004, 130(3): 267—273.
- [8] YANG X L, LI L, YIN J H. Seismic and static stability analysis for rock slopes by a kinematical approach[J]. **Geotechnique**, 2004, 54(8): 543—549.
- [9] 杨小礼, 李亮, 刘宝琛. 非线性破坏准则对竖直边坡稳定性分析的影响[J]. 岩石力学与工程学报, 2004, 23(4): 592—596.
- [10] 胡卫东, 张国祥. 非线性破坏准则下的边坡稳定塑性极限分析[J]. 岩土力学, 2007, 28(9): 1909—1913.
- [11] HU Wei-dong, ZHANG Guo-xiang. Plastic limit analysis of slope stability with nonlinear failure criterion[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2007, 28(9): 1909—1913.
- [12] 陈祖煜. 土力学经典问题的极限分析上、下限解[J]. 岩土工程学报, 2002, 24(1): 1—11.
- [13] CHEN Zu-yu. Limit analysis for the classic problems of soil mechanics[J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 2002, 24(1): 1—11.
- [14] 陈祖煜, 汪小刚, 杨健, 等. 岩质边坡稳定性分析—原理、方法、程序[M]. 北京: 中国水利水电出版社, 2004.
- [15] DONALD I, CHEN Z Y. Slope stability analysis by the upper bound approach: fundamentals and methods[J]. **Canadian Geotechnical Journal**, 1997, 34(6): 853—862.
- [16] CHEN Z Y, WANG J, WANG Y J, et al. A three-dimensional slope stability analysis method using the upper bound theorem (Part II): numerical approaches, applications and extensions[J]. **International Journal of Rock Mechanics & Mining Sciences**, 2001, (38): 379—397.
- [17] YANG X L, HUANG F. Slope stability analysis considering joined influences of nonlinearity and dilation[J]. **Journal of Central South University of Technology**, 2009, (2): 292—296.
- [18] 王云岗, 熊凯, 凌道盛. 基于平动加转动运动场的边坡稳定上限分析[J]. 岩土力学, 2010, 31(8): 2619—2624.
- [19] WANG Yun-gang, XIONG Kai, LING Dao-sheng. Upper bound limit analysis of slope stability based on translational and rotational failure mechanism[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2010, 31(8): 2619—2624.
- [20] 李亮, 于广明, 褚雪松, 等. 土坡稳定极限分析上限法中的多解性分析[J]. 岩土力学, 2009, 30(增刊 2): 97—101.
- [21] LI Liang, YU Guang-ming, CHU Xue-song, et al. Multiple solutions in upper bound limit analysis of soil slopes[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2009, 30(Suppl. 2): 97—101.